Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего профессионального образования
ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно-методическое пособие
для студентов первого курса бакалавриата, обучающихся по заочной форме по направлениям 38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент», 38.03.03 «Управление персоналом» и 38.03.05 «Бизнес-информатика»

Под редакцией профессора Н.Ш. Кремера

Факультет «Прикладная математика и информационные технологии»
Кафедры «Математика-1», «Математика-2»

Москва – 2014

ББК 22.3

Введение, методические указания и рекомендации
по изучению дисциплины подготовил проф. ***Н.Ш. Кремер***

Варианты контрольных работ подготовили:
доц. *Борисова Л.Р.*, доц. *Путко Б.А.*, ст. преп. *Федорова Н.И.*
доц. *Шевелев А.Ю.*

Учебно-методическое пособие обсуждено на заседаниях
кафедр «Математика-1», «Математика-2»
Зав. кафедрой «Математика-1» профессор ***В.Б. Гисин***
Зав. кафедрой «Математика-2» доцент ***В.Г. Феклин***

Математический анализ. Учебно-методическое пособие для студентов первого курса бакалавриата, обучающихся по заочной форме по направлениям 38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент», 38.03.03 «Управление персоналом» и 38.03.05 «Бизнес-информатика» / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. М.: Финуниверситет, 2014.

В учебно-методическом пособии приведен обзор основных понятий и положений дисциплины «Математический анализ», даны методические рекомендации по их изучению, выделены типовые задачи, представлены контрольные вопросы для самопроверки и задачи для самоподготовки по данным дисциплинам, приведены варианты контрольных работ для студентов первого курса бакалавриата направлений «Экономика», «Менеджмент», «Управление персоналом» и «Бизнес-информатика», а также методические указания по ее выполнению.

ББК 22.3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Совершенствование деятельности в любой области экономики (управлении, финансово-кредитной сфере, маркетинге, учете, аудите) в значительной мере связано с применением в экономической науке и практике математических методов исследования.

Цель курса математики в системе подготовки экономиста – освоение необходимого математического аппарата, помогающего анализировать, моделировать и решать прикладные экономические задачи, при необходимости с применением ПЭВМ. Изучаемые в математике методы и модели являются не только инструментами количественного расчета, средствами решения прикладных задач, но и эффективными методами проведения экономических исследований, элементами общей культуры.

Задачи изучения дисциплины «Математический анализ» вытекают из требований к результатам освоения и условиям реализации основной образовательной программы и компетенций, установленных Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования (ФГОС-3) по направлениям 080100.62 «Экономика», 080200.62 «Менеджмент», 080400.62 «Управление персоналом» и 080500.62 «Бизнес-информатика».

В процессе изучения дисциплины перед студентами ставятся следующие задачи: освоение приемов исследования и решения математически формализованных задач; использование классического математического аппарата для решения прикладных задач; выработка умения моделировать реальные объекты и процессы; развитие логического и алгоритмического мышления студентов; повышение уровня математической культуры студентов; развитие навыков самостоятельной работы по изучению учебной и научной литературы.

В соответствии с ФГОС-3 по направлениям «Экономика», «Менеджмент», «Управление персоналом» «Бизнес-информатика», квалификация (степень) бакалавр, в процессе изучения дисциплины «Математический анализ» предполагается формирование ряда общекультурных компетенций (ОК):

– владеть культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановки цели и выбору путей ее достижения[1] (ОК-1);

– способность логически верно, аргументированно и ясно строить устную и письменную речь (ОК-6) и др.

[1] В ФГОС-3 по направлениям «Управление персоналом» и «Бизнес-информатика» эта компетенция имеет код «ОК-5».

В соответствии с ФГОС-3 по направлению «Экономика» процесс изучения дисциплины «Математический анализ» направлен на формирование следующих профессиональных компетенций (ПК):

в области расчетно-экономической деятельности –

способность собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов (ПК-1);

способность выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организации стандартами (ПК-3);

в области аналитической, научно-исследовательской деятельности –

способность осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных экономических задач (ПК-4);

способность выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы (ПК-5);

способность на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты (ПК-6);

способность использовать для решения аналитических и исследовательских задач современные технические средства и информационные технологии (ПК-10);

в области организационно-управленческой деятельности –

способность использовать для решения коммуникативных задач современные технические средства и информационные технологии (ПК-12);

в области педагогической деятельности –

способность преподавать экономические дисциплины в образовательных учреждениях различного уровня, используя существующие программы и учебно-методические материалы (ПК-14);

способность принять участие в совершенствовании и разработке учебно-методического обеспечения экономических дисциплин (ПК-15).

В соответствии с ФГОС-3 по направлениям «Менеджмент» и «Управление персоналом» процесс изучения дисциплины «Математический анализ» направлен на формирование не отмеченной выше общекультурной компетенции –

владение методами количественного анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОК-16 (ОК-15))

и профессиональной компетенции

в области информационно-аналитической деятельности –

умение применять количественные и качественные методы анализа при принятии управленческих решений … (ПК-31);

методами оценки и прогнозирования профессиональных рисков (ПК-45).

В соответствии с ФГОС-3 по направлению «Бизнес-информатика» процесс изучения дисциплины «Математический анализ» направлен на формирование следующих профессиональных компетенций (ПК) –

в области научно-исследовательской деятельности

– использование основных методов естественно-научных дисциплин для теоретического и экспериментального исследования (ПК-19);

– использование соответствующих математического аппарата и инструментальных средств для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования (ПК-20);

– подготовка научно-технических отчетов, презентаций, научных публикаций по результатам выполненных исследований (ПК-21).

В результате изучения дисциплины студент должен:

а) **знать** основные понятия дифференциального и интегрального исчислений, дифференциальных уравнений и рядов, линейной алгебры и аналитической геометрии, используемые в экономических исследованиях;

б) **уметь** применять основные классические математические методы решения прикладных задач; строить математические модели прикладных задач;

в) **владеть** навыками классического математического инструментария для решения прикладных (экономических) задач.

Студенты бакалавриата направлений 080100.62 «Экономика» 080200.62 «Менеджмент», 080400.62 «Управление персоналом» и 080500.62 «Бизнес-информатика» в рамках базового курса математики изучают три самостоятельные математические дисциплины: «Математический анализ» (I курс), «Линейная алгебра» (I курс), «Теория вероятностей и математическая статистика» (II курс). Студенты бакалавриата направления «Бизнес-информатика», кроме вышеназванных трех дисциплин, изучают также две дополнительные математические дисциплины «Дифференциальные и разностные уравнения» (II курс), «Дискретная математика» (II курс).

В зависимости от направлений подготовки студенты бакалавриата изучают прикладные математические дисциплины «Методы оптимальных решений» (III курс), «Исследование операций» (III курс) и др.

По дисциплине «Математический анализ» студенты бакалавриата всех направлений должны выполнить две контрольные работы № 1 и № 2 (задания к которым приводятся в данном пособии). Контрольная работа №1 (в соответствии с учебным графиком) может быть существенно дополнена за счет частичного использования компьютерной обучающей программы (КОПР). По каждой контрольной работе проводится собеседование. В процессе изучения дисциплины студенты проходят компьютерное тестирование (если оно предусмотрено учебным планом) и сдают курсовой экзамен

При выставлении итоговой оценки студента по данной дисциплине учитываются балльная оценка текущей успеваемости (качество подготовки и работа на практических занятиях, выполнение контрольных работ и собеседований по ним, компьютерное тестирование, посещение занятий) и результаты экзамена.

.

ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящего методического пособия – помочь студентам в организации занятий при изучении общего курса математики.

Для освоения данной дисциплины в вузе читаются лекции и проводятся практические занятия. В то же время основной формой обучения в условиях заочного вуза является самостоятельная работа с учебником и учебными пособиями (см. с. 54). Дополнительно для самостоятельного изучения дисциплин рекомендуется Интернет-ресурсы: компьютерная обучающая программа КОПР, обзорная лекция, электронная учебно-методическая литература и др., размещенные на сайте университета.

В помощь студентам в университете и его филиалах функционируют учебно-методические кабинеты, которые позволяют ознакомиться с образцами контрольных работ и авторскими текстами лекций, осуществить выход в Интернет, поработать с Интернет-ресурсами института, компьютерными обучающими программами и электронными версиями учебно-методической литературы, ознакомиться с авторскими текстами лекций, пройти тестирование в режиме самоконтроля.

Каждый студент с самого начала занятий должен выработать для себя рациональную систему работы над курсом и постоянно практиковаться в решении задач. В противном случае усвоение и практическое использование учебного материала затруднены. Чрезвычайно важны систематические занятия. Работа урывками не приносит положительных результатов.

Студент обязан вести конспект (рабочую тетрадь). Рекомендуется конспектировать определения, формулировки теорем, схемы их доказательств, формулы и решения задач. Формулы следует выписывать в специальные таблицы для каждой части (раздела) курса. Постоянное пользование конспектом, в частности таблицами формул, способствует их запоминанию и дает возможность решать примеры и задачи, не обращаясь к учебным пособиям.

Часто приходится слышать высказывания студентов о том, что теорию они знают, а решать задачи не умеют. Это свидетельствует о неглубоком усвоении учебного материала. Нужно решать как можно больше задач. Начинать следует с наиболее простых, элементарных, а затем переходить к более сложным. По такому принципу и расположены задачи в рекомендуемых учебных пособиях. Решение следует доводить до окончательного результата, промежуточные преобразования выполнять последовательно и аккуратно. Если задача связана с отысканием численного результата, то подстановку численных значений вместо букв лучше производить только в окончательно упрощенное выражение.

Если материал учебника, учебного или методического пособия, КОПР не дает ответа на возникший вопрос, то следует обратиться за консультацией (письменной (по электронной почте) или устной) на кафедру математики. Для получения письменной консультации необходимо указать, каким учебником (пособием, КОПР) вы пользовались (автор, наименование, год издания) и какое конкретное место в учебнике не понятно. Если появились затруднения в решении задачи, укажите, каким способом вы пытались ее решить. Лишь в этом случае преподаватель сможет оказать вам помощь.

При решении различных задач нередко приходится вычислять приближенно значения функции, определенного интеграла и др. Незнание правил приближенных вычислений часто приводит к тому, что их результаты оказываются не только неточными, но и ошибочными, настолько они далеки от истинных (точных) значений. При этом многие стремятся удержать больше цифр в окончательном ответе, показать, какой «высокой» степени точности они добились. Точность такого ответа, как правило, оказывается ложной, так как определенное число последних цифр просто ошибочно. Чтобы этого не случилось, необходимо знать и применять правила приближенных вычислений. Ими надлежит пользоваться при выполнении арифметических операций с приближенными числами и для получения приближенного результата.

Вопросы организации компьютерного тестирования, основные типы и примеры тестовых заданий по данной дисциплине рассматриваются в брошюре «Математический анализ и линейная алгебра. Методические указания по компьютерному тестированию» ([Электронные ресурсы, 3]).

Вопросы выполнения контрольных работ с частичным использованием КОПР рассматриваются в брошюре: «Математика. Методические указания по проведению и выполнению контрольных работ с использованием КОПР» ([Электронные ресурсы, 4])..

Примечание. Учитывая, что в соответствии с учебными планами подготовки бакалавров направлений «Экономика», «Менеджмент», «Управление персоналом» и «Бизнес информатика» предусматриваются разные число математических дисциплин и количество учебных часов на их изучение, в данном методическом пособии используется следующим обозначения:

* – материал не обязателен (но рекомендован для самостоятельного изучения) для студентов бакалавриата направлений «Менеджмент» и «Управление персоналом»;

** – материал обязателен для студентов бакалавриата направления «Экономика»; не обязателен (но рекомендован) – для студентов направлений «Менеджмент» и «Управление персоналом»; переносится в дисциплину «Дифференциальные и разностные уравнения» для студентов бакалавриата направления «Бизнес-информатика».

Основные правила приближенных вычислений

Обозначим через x точное (истинное) значение некоторой величины (точное число), а через a – ее приближенное значение (приближенное число).

Число $\Delta=|x-a|$ называется *истинной абсолютной погрешностью* приближенного числа a.

Обычно истинная абсолютная погрешность Δ числа a неизвестна, так как не дано точное значение x, а известна так называемая предельная абсолютная погрешность. Число α называется *предельной абсолютной погрешностью* приближенного числа a, если

$$|x-a| \leq \alpha.$$

Относительной погрешностью δ приближенного числа a называется отношение его абсолютной погрешности к абсолютной величине точного числа x:

$$\delta = \frac{\Delta}{|x|}.$$

Если точное значение числа x неизвестно, а Δ мало по сравнению с $|a|$, то можно считать, что

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}.$$

Относительную погрешность часто выражают в процентах, т.е.

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|} \cdot 100 (\%).$$

Цифра данного разряда приближенного числа a называется *верной*, если абсолютная погрешность $\Delta = | x - a |$ этого числа не превосходит пяти единиц следующего справа разряда. В противном случае эта цифра называется *неверной*.

У всякого десятичного числа $a \neq 0$ существует первая слева цифра, отличная от нуля. Эта цифра называется *первой значащей цифрой* числа a. Все цифры, начиная с первой значащей и правее являются *значащими цифрами* числа a. Говорят, что приближенное число a имеет n верных значащих цифр, если n-я и предшествующие ей значащие цифры верные, а $(n + 1)$-я цифра — неверная.

В вычислительной практике также употребляют термин *"число верных десятичных знаков"*. Под ним понимают число верных цифр в десятичной дроби после нулей, указывающих разряды. Цифры приближенного числа, не являющиеся верными, отбрасывают, а число при этом округляют.

Правило округления. Если первая из отбрасываемых цифр, считая слева направо, меньше 5, то последнюю оставшуюся цифру не меняют; если больше или равна 5, то последнюю оставшуюся цифру надо увеличить на единицу.

Если отбрасывается т о л ь к о цифра 5, а предшествующая ей цифра четная, то последнюю оставшуюся цифру менять не следует, если нечетная, то последнюю оставшуюся цифру надо увеличить на единицу *(правило четных знаков)*.

Пример. $\pi = 3{,}1415926....$ Округляя число до трех значащих цифр, получим $\pi \approx 3{,}14$ (так как $1<5$); округляя его до четырех значащих цифр, получим $\pi \approx 3{,}142$ ($5 \geq 5$), а округляя его до пяти значащих цифр, получим $\pi \approx 3{,}1416$ (так как $9 \geq 5$). В то же время число $x = 0{,}6525 \approx 0{,}652$ (по правилу четных знаков, так как отбрасывается только цифра 5).

Окончательные результаты вычислений обычно округляют на последней верной цифре, а в промежуточных результатах удерживают одну запасную цифру, которая может оказаться и неверной.

При этом пользуются следующими правилами определения верных цифр результата.

1. При *сложении (вычитании)* приближенных чисел в сумме следует сохранить столько *десятичных знаков*, сколько их имеет слагаемое с наименьшим числом десятичных знаков.

2. При *умножении* приближенных чисел в произведении следует оставить столько *значащих цифр*, сколько их имеет сомножитель с наименьшим числом верных значащих цифр.

3. При *возведении в степень* и *извлечении корня* число верных значащих цифр результата равно числу верных *значащих цифр* основания степени.

4. Правило запасной цифры. Для того чтобы после небольшого количества алгебраических действий над приближенными числами получить результат с n верными цифрами, достаточно исходные данные взять с $(n + 1)$ верными цифрами и во всех промежуточных результатах сохранить $(n + 1)$ верных цифр, а окончательное значение округлить до n цифр.

Пример. Дано: $\pi \approx 3{,}14159$; $\lg e \approx 0.434$ (все цифры верные). Вычислить приближенно: а) $\pi + \lg e$; б) $\pi \cdot \lg e$.

Р е ш е н и е. а) Число π содержит 5 верных десятичных знаков, $\lg e$ – 3 следовательно, сумма должна содержать 3 верных десятичных знака. Округляя (с запасной цифрой) число π до 4 десятичных знаков, получим:

$$\pi + \lg e \approx 3{,}1416 + 0{,}434 = 3{,}5756 \approx 3{,}576.$$

Число π содержит 6 верных значащих цифр, $\lg e$ – 3 (нуль не считается), следовательно, произведение должно содержать 3 верных значащих цифры. Округляя (с запасной цифрой) число π до 4 значащих цифр, получим:

$$\pi \cdot \lg e = 3{,}142 \cdot 0{,}434 = 1{,}363628 \approx 1{,}36.$$

Вычислительную работу по возможности следует упрощать. Для этого рекомендуется пользоваться электронными калькуляторами, пакетом Excel и т.п. Всякая вычислительная работа должна контролироваться. Простейшим методом контроля является выполнение решения заново (лучше спустя некоторое время) и сравнение полученных результатов.

Основные правила приближенных вычислений будут нужны и в дальнейшем – при выполнении контрольных (лабораторных, курсовых, выпускных) работ по теории вероятностей и математической статистике и другим математическим, профессиональным и специальным дисциплинам.

Содержание дисциплины и методические рекомендации по ее изучению

Ниже по каждой теме приводится учебно-программный материал, который должен изучить студент со ссылками на рекомендованные (в качестве основной литературы) учебники и учебные пособия.

Контрольные вопросы по каждой теме представлены ниже в разделе «Вопросы для самопроверки».

Рекомендуемые по каждой теме задачи с решениями и для самостоятельной работы приводятся ниже в разделе «Задачи для самоподготовки».

Вопросы, касающиеся организации компьютерного тестирования, основные типы и примеры тестовых заданий по данной дисциплине рассматриваются в учебно-методическом издании «Математический анализ и линейная алгебра. Методические указания по компьютерному тестированию» [Электронные ресурсы, 4].

Вопросы, касающиеся выполнения контрольных работ с частичным использованием КОПР рассматриваются в учебно-методическом издании: «Математика. Методические указания по проведению и выполнению контрольных работ с использованием КОПР» ([Электронные ресурсы, 5]).

Раздел I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Тема 1. Функции

Понятие о множествах. Действительные числа и числовые множества. Постоянные и переменные величины. Функции и способы их задания. Область определения функции. Четные, нечетные, монотонные и ограниченные функции. Сложная функция. Понятие элементарной функции. Основные элементарные функции и их графики. Неявные функции. ([1 или 5, § 5.1 – 5.5, 5.7]; [2 или 6, гл. 5], или [3, §5.1 – 5.5, 5.7], или [4, §1.1 – 1.5, 1.7]).

Прежде всего полезно ознакомиться с некоторыми логическими символами и кванторами, чтобы использовать их в дальнейшем для сокращения записей ([1, или 5, или 3, § 5.1, 6.1]).

Изучение темы следует начать с основных понятий теории множеств ([1 или 5, или 3, § 5.1]). Далее нужно четко усвоить важнейшее понятие математического анализа – функции, уметь находить область ее определения, знать способы задания функции: аналитический, графический, табличный, словесный.

В нашем курсе рассматриваются в основном элементарные функции. Студент должен уяснить определение элементарной функции ([1, или 5, или 3, § 5.5]), четко знать свойства и строить графики следующих основных элементарных функций: $y = C$ (постоянная), $y = x^n$ (степенная), $y = a^x$ (показательная), $y = \log_a x$ (логарифмическая). Необходимо усвоить понятие сложной функции (функции от функции).

Построение графика четной (нечетной) функции можно значительно упростить, если учесть, что графики четных функций симметричны относительно оси Oy, а нечетных – относительно начала координат. Одним из характерных свойств функции является монотонность (т.е. ее возрастание или убывание на каком-либо промежутке).

Тема завершается рассмотрением линейной функции и элементов аналитической геометрии на плоскости – простейших уравнений прямой. Этот материал будет использоваться на III курсе при изучении дисциплин «Методы оптимальных решений», «Исследование операций».

Основополагающее значение здесь имеет определение уравнения линии на плоскости как уравнения с двумя переменными x и y, которому удовлетворяют координаты каждой точки этой линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на ней. Из этого определения следуют два важных для практики положения.

1. Если задано уравнение линии, то можно установить, принадлежит ли ей какая-либо точка плоскости. Для этого достаточно подставить координаты точки в уравнение линии вместо переменных x и y. Если окажется, что они удовлетворяют уравнению, то точка принадлежит линии, в противном случае – не принадлежит.
2. Координаты точки пересечения двух линий, заданных своими уравнениями, удовлетворяют обоим уравнениям. Поэтому для нахождения координат точки пересечения двух линий нужно решить систему, составленную из их уравнений.

Студент должен знать простейшие виды уравнений прямой и уметь пользоваться ими при решении задач. Соответствующий учебный материал приведен в учебнике ([1, или 5,или 3, § 4.2]).

Обратите особое внимание на нахождение уравнений прямых, параллельной и перпендикулярной данной прямой ([1, или 5, или 3, пример 4.5].

Тема 2. Пределы и непрерывность

Предел числовой последовательности. Предел функции в бесконечности и точке. Бесконечно малые величины и их свойства. Бесконечно большие величины. Основные теоремы о пределах: теорема единственности, предел суммы, произведения, частного. Признаки существования предела. Второй замечательный предел. Число e. Понятие о натуральных логарифмах. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Основные теоремы о непрерывных функциях. Раскрытие неопределенностей вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$, $[1^{\infty}]$. *Вычисление пределов* ([1 или 5, § 6.1 – 6.8]; [2 или 6, § 6.1 – 6.3, 6.5], или [3, § 6.1 – 6.10], или [4, §2.1 – 2.10]).

Наряду с понятием функции, понятия предела и непрерывности являются основными в разделе «Введение в анализ».

Понятие предела в учебнике [1, или 5, или 3] рассматривается для числовой последовательности $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$ и для функции: в бесконечности $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right)$ и в точке $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)$. Для выяснения смысла этих понятий необходимо использовать их геометрическую интерпретацию. Весьма важными являются понятия бесконечно малых и бесконечно больших величин ([1, или 5, или 3, § 6.3, 6.4]), суть которых сводится к тому, что при своем изменении бесконечно малая (по абсолютной величине) будет меньше любого, как угодно малого числа $\varepsilon > 0$, а бесконечно большая будет больше любого как угодно большого числа $M > 0$.

Нужно знать взаимосвязь бесконечно малых и бесконечно больших величин, свойства бесконечно малых, с помощью которых доказываются теоремы о пределах. Следует обратить внимание на признаки существования пределов, особенно на теорему 1 ([1 или 5, или 3, § 6.5]), часто позволяющую установить наличие предела значительно проще, чем при использовании его определения.

Необходимо (без вывода) знать второй замечательный предел в двух формах записи:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \qquad \text{и} \qquad \lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y} = e\,.$$

Понятие непрерывности функции (в точке, на промежутке) является более простым, чем предел, так как оно выражается непрерывностью графика при прохождении данной точки, данного промежутка (без отрыва карандаша от листа бумаги). Наряду с интуитивным представлением надо знать определение непрерывности функции в точке и на промежутке, свойства непрерывных функций, а также то, что всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке области определения и может иметь разрыв лишь на границах области определения.

Раздел II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Тема 3. Производная

Задачи (о касательной к плоской кривой и о мгновенной скорости), приводящие к понятию производной. Производная, ее геометрический, механический и экономический смысл. Уравнение касательной к плоской кривой. Дифференцируемость функции. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции (необходимый признак дифференцируемости). Основные правила и основные формулы дифференцирования. Формулы производных основных элементарных функций. Производная сложной функции. Техника дифференцирования. Производные высших порядков ([1, § 7.1 – 7.7]; [2, § 7.1 – 7.3], или [3, § 7.1 – 7.7, 7.11, 7.12], или [4, §3.1 – 3.7, 3.11, 3.12]).).

Студенты должны знать две классические задачи, которые приводят к понятию производной: задачу о касательной к плоской кривой и задачу о скорости неравномерного прямолинейного движения. Их решение выявляет геометрический и механический смысл производной. Нужно четко знать определение производной, представлять ее экономический смысл ([1, § 7.6] или [3, § 7.10]), уметь составить уравнение касательной к графику любой функции $y = f(x)$ в заданной точке.

Изучая материал этой темы, студенты знакомятся с необходимым условием дифференцируемости функции. Необходимо четко уяснить, что из дифференцируемости функции в некоторой точке следует ее непрерывность в этой точке. Обратная теорема не справедлива, так как существуют непрерывные функции, которые в некоторых точках могут не иметь производной ([1 или 5, § 7.2] или [3, § 7.2]).

Нужно, чтобы студенты, хорошо усвоив основные правила дифференцирования, умели находить производную суммы и произведения нескольких дифференцируемых функций, производную частного двух функций, пользоваться основными формулами дифференцирования, а также могли их вывести. Таблица основных формул приведена в учебнике ([1 или 5, или 3, § 7.5]) и на переднем форзаце. Наиболее важным для овладения техникой дифференцирования функций, и к тому же наиболее трудным, является правило дифференцирования сложной функции ([1, или 5, или 3, §7.4]). Знание этого правила способствует успешному освоению техники дифференцирования функций. Поэтому необходимо обратить особое внимание на примеры с решениями, в которых иллюстрируется его применение. Нужно усвоить понятия производных высших порядков и уметь их находить.

Тема 4. Приложения производной

Теорема Ролля и Лагранжа. Правило Лопиталя (без вывода). Признаки возрастания и убывания функции. Экстремум функции. Необходимые и достаточные признаки экстремума (второй достаточный признак – без доказательства). Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке; их нахождение; решение задач. Исследование функции (область определения, четность и нечетность, интервалы монотонности и точки экстремума, поведение функции при $x \to \pm\infty$ и в точках разрыва, вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты, точки пересечения графика с осями координат) и построение ее графика. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ и ее график. Дробно-линейная функция $y = (ax + b)/(cx + d)$ и ее график* ([1 или 5, § 8.1 – 8.5, 8.7 – 8.9]; [2 или 6, § 8.1 – 8.3, 8.5], или [3, § 8.1 – 8.5, 8.7, 8.8, 8.10 – 8.12, 8.14], или [4, §4.1 – 4.5, 4.7, 4.8, 4.10 – 4.12, 4.14])

Одно из простейших приложений производной – раскрытие неопределенностей вида [0/0] или $[\infty/\infty]$ с помощью правила Лопиталя ([1, или 5, или 3, § 8.2]). Обратите внимание на то, что согласно формуле (8.3) предел отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных, а не пределу производной частного этих функций.

Теоремы дифференциального исчисления являются обоснованием такой важной области приложения производных, как исследование функций. Студенты должны знать формулировки этих теорем, четко различая в них условие и заключение.

В учебнике приведена схема исследования функции для нахождения ее характерных точек и особенностей, по которым можно построить ее график ([1, или 5, или 3, § 8.8]). Выполнение пункта 6^0 этой схемы, связанного с нахождением интервалов выпуклости функции и точек перегиба, не обязательно.

Тема 5. Дифференциал функции

Понятие дифференциала функции. Геометрический смысл дифференциала. Свойства дифференциала. Инвариантность формы дифференциала первого порядка. ([1или 5, § 9.1, 9.2]; [2 или 6, гл. 9]; [3, § 7.7 – 7.9, 7.13] или [4, §3.7 – 3.9, 3.13]).

Дифференциал функции $y = f(x)$ – главная, линейная (относительно приращения Δx аргумента) часть приращения функции – равен произведению производной на дифференциал независимой переменной, т.е. $dy = f'(x)dx$. Геометрический смысл дифференциала рассмотрен в ([1 или 5, § 9.1] или [3, § 7.4]).

Операция нахождения дифференциала сводится к нахождению производной и также называется дифференцированием функции.

Важное свойство дифференциала первого порядка – инвариантность его формы (или формулы). Это означает, что дифференциал функции $y = f(u)$ есть $dy = f'(u)du$ и не зависит от того, является ли u независимой переменной или функцией. Свойство инвариантности формы дифференциала используется далее в интегральном исчислении.

Раздел III. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Тема 6. Функции нескольких переменных

Функции двух и нескольких переменных. Частные производные и техника дифференцирования. Экстремум функции двух переменных и его необходимое условие. Понятие об эмпирических формулах и методе наименьших квадратов. Построение методом наименьших квадратов линейной функции по эмпирическим данным (*вывод системы нормальных уравнений*) ([1 или 5, § 15.1, 15.3, 15.6, 15.9]; [2 или 6, § 15.1 – 15.4], или [3, § 9.1, 9.3, 9.7, 9.10, 9.12 – 9.15], или [4, §5.1, 5.3, 5.7, 5.10, 5.12 – 5.15]).

Фактически мы ограничиваемся рассмотрением функции двух переменных. Для успешного усвоения этого раздела рекомендуется использовать метод аналогии с функциями одной переменной, хотя с увеличением числа переменных возникают существенные качественные отличия. Область определения функции двух переменных изображается множеством точек плоскости, а график – некоторой поверхностью в трехмерном пространстве ([1или 5, пример 15.2] или [3, пример 9.2]).

В определении частной производной функции по одной из переменных используется понятие частного приращения, а в остальном оно сходно с определением производной функции одной переменной. Обратите внимание на способы обозначения частных производных. Техника дифференцирования функции двух (нескольких) переменных использует те же правила и приемы, которые применялись при нахождении производных функций одной переменной.

Для экстремума функции двух переменных формулируется определение и необходимое условие его существования ([1 или 5, § 15.6] или [3, § 9.7]), которые не являются достаточными.

Построение эмпирических формул методом наименьших квадратов имеет большое прикладное значение, в том числе в статистических и экономических исследованиях. Так как эмпирическая формула включает неизвестные параметры, то критерий, согласно которому она получается, является функцией этих параметров (функцией нескольких переменных).

Параметры подбираются таким образом, чтобы критерий принял оптимальное (минимальное) значение. Возникает задача нахождения экстремума функции нескольких переменных – этим и объясняется рассмотрение в данном разделе метода наименьших квадратов.

Полученная методом наименьших квадратов эмпирическая формула является приближением таблично заданной функции.

Следует отметить, что погрешность построенного приближения *f(x)* оценивается величиной $\delta = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta^2{}_i}$, где $\delta_i = f(x_i) - y_i$, а n – число табличных значений (x_i, y_i). Используя полученное приближение, можно найти значения функций в точках, которые отличаются от табличных и лежат внутри отрезка (x_1, x_n) (интерполяция) или вне его (экстраполяция).

Раздел IV. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Тема 7. Неопределенный интеграл

Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла (с доказательством). Таблица основных интегралов. Интегрирование методом разложения, замены переменной и по частям. Понятие о «неберущихся» интегралах ([1 или 5, § 10.1 – 10.5, 10.8]; [2 или 6, § 10.1 – 10.3, 10.5], или [3, § 10.1 – 10.6, 10.9 – 10.11], или [4, §6.1 – 6.6, 6.9 – 6.11]).

Следует обратить внимание на то, что интегрирование вводится как операция, обратная дифференцированию, но в отличие от последнего приводит к неоднозначному результату: для любой непрерывной функции $f(x)$ имеется бесконечное множество первообразных. Они отличаются друг от друга лишь на постоянное слагаемое.

Доказательства основных свойств неопределенного интеграла получены исходя из определения первообразной. Правильность интегрирования можно проверить дифференцированием; этот прием следует использовать для проверки решения соответствующих примеров в контрольной работе.

Под непосредственным интегрированием понимают нахождение неопределенного интеграла путем преобразования его к табличному с помощью основных правил интегрирования и тождественных преобразований подынтегральной функции.

Обратите внимание на свойство, связанное с линейным преобразованием аргумента ([1 или 5, формула (10.17)] или [3, формула (10.19)]), так как это простейшее из свойств, которое часто применяется при непосредственном интегрировании. Используя его, можно свести к табличным ряд интегралов.

Метод подстановки, или метод замены переменной, – один из основных приемов интегрирования функций. Следует обратить внимание на то, что можно использовать подстановки двух видов:

а) переменная интегрирования *x* заменяется функцией переменной *t*:

$x=\varphi(t)$, а $dx=\varphi'(t)dt$ –

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt;$$

б) новая переменная *t* вводится как функция переменной интегрирования *x*:

$t=\varphi(x)$, $dt=\varphi'(x)dx$ –

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f(t)dt.$$

Последнюю подстановку удобно применять, если подынтегральное выражение содержит дифференциал (производную) функции $\varphi(x)$ с точностью до постоянного множителя.

Если интеграл, полученный после замены переменной, стал «проще» данного (преобразован в табличный или приводящийся к табличному), то цель подстановки достигнута.

После интегрирования функции по переменной *t* необходимо вернуться к прежней переменной *x*, выразив *t* через *x* по формуле, применявшейся при подстановке.

Примеры различных подстановок даны в ([1, или 5, или 3, § 10.3, 10.6]).

Практическое применение формулы интегрирования по частям ([1 или 5, или 3, § 10.4]), если оно целесообразно, связано с проблемой правильного разбиения подынтегрального выражения на сомножители *u* и *dv*. Отметим, что формулу интегрирования по частям, как правило, удобно применять, если подынтегральная функция является произведением многочлена на показательную или логарифмическую функцию ([1 или 5, примеры 10.10 – 10.13]; [3, примеры 10.8, 10.9]).

Тема 8. Определенный интеграл

Задача о вычислении площади криволинейной трапеции. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Формула Ньютона – Лейбница. Свойства определенного интеграла. Вычисление определенного интеграла методом замены переменной и по частям. Понятие о несобственных интегралах с бесконечными пределами интегрирования. Вычисление площадей плоских фигур. Приближенное вычисление определенного интеграла по формуле трапеций ([1 или 5, § 11.1 – 11.8, 11.10]; [2 или 6, § 11.1 – 11.4], или [3, § 11.1 – 11.8, 11.11 – 11.14], или [4, §7.1 – 7.8, 7.11 – 7.14]).

Рассматривая задачу о нахождении площади криволинейной трапеции, нужно четко представлять, что сначала выводится формула площади этой фигуры, а затем проводится ее вычисление.

Студент должен знать определение определенного интеграла как предела интегральной суммы и то, что благодаря формуле Ньютона – Лейбница ([1, или 5, или 3, формула (11.15)]) – основной формуле интегрального исчисления – удается свести вычисление этого интеграла к нахождению приращения любой первообразной для данной функции на отрезке интегрирования. Следует обратить внимание на достаточное условие интегрируемости функции на данном отрезке – непрерывность функции на этом отрезке.

Используя метод подстановки при вычислении определенного интеграла, нужно изменять пределы интегрирования после введения новой переменной и вычислять интеграл, не возвращаясь к старой переменной ([1 или 5, примеры 11.3, 11.18] или [3, примеры 11.3, 11.23]).

Применяя формулу интегрирования по частям, можно находить частное приращение первообразной *uv* в процессе решения, не откладывая это действие до полного отыскания первообразной ([1 или 5, или 3, пример 11.4]).

Понятие несобственного интеграла с бесконечными пределами появляется как обобщение понятия определенного интеграла для случая, когда один из пределов интегрирования или оба не ограничены, т.е. когда подынтегральная функция определена и непрерывна на одном из промежутков: $[a;+\infty),(-\infty;b]$ или $(-\infty;+\infty)$. Если при этом первообразная известна (является элементарной функцией), то сходимость несобственного интеграла устанавливается по определению. Если первообразная неизвестна (неопределенный интеграл не "берется" в элементарных функциях), то сходимость устанавливается косвенным путем с помощью признаков сходимости. Последнее выходит за рамки программы.

Применяя определенный интеграл для вычисления площадей плоских фигур, мы исходим из того интуитивного утверждения, что всякая плоская фигура, ограниченная несколькими непрерывными кривыми, образующими замкнутый контур, имеет площадь. Следует помнить, что "простейшей" фигурой, площадь которой выражается определенным интегралом, является криволинейная трапеция. Во всех остальных случаях фигуру нужно представить в виде сумм или разностей криволинейных трапеций. Решение задачи на вычисление площади криволинейной трапеции всегда начинают с построения чертежа и при этом следят за тем, чтобы граница фигуры содержала все заданные в условии линии и точки.

(Уяснить сказанное можно, разобрав примеры, в которых вычисляются площади различных плоских фигур) (см. ниже, раздел «Задачи для самоподготовки»).

Формула трапеций и другие формулы для приближенного вычисления определенных интегралов используются, когда соответствующая первообразная не является элементарной функцией ("неберущийся" неопределенный интеграл) или когда интеграл представляет собой трансцендентную функцию (для составления таблиц значений таких функций).

Тема 9. Дифференциальные уравнения (**)

Понятие о дифференциальных уравнениях. Общее и частное решения. Задача Коши. Задача о построении математической модели демографического процесса. Дифференциальные уравнения первого порядка (*неполные, с разделяющимися переменными, однородные и линейные*) ([1или 5, §12.1, 12.2, 12.4 – 12.6]; [2 или 6, §12.1 – 12.4], или [3, §12.1, 12.2, 12.4 – 12.6, 12.11 – 12.14], или [4, §8.1, 8.2, 8.4 – 8.6, 8.12 – 8.15]).

Во многих задачах экономики, физики, экологии встречаются уравнения, связывающие искомую функцию одной или нескольких переменных с производными (или дифференциалами) различных порядков и получившие название дифференциальных уравнений. Одна из таких задач о построении простейшей математической модели демографического процесса ([1или 5, или 3, пример 12.3]) рассматривается в данной теме.

Обратите внимание на то, что задача Коши – задача отыскания частного решения дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x,y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$ всегда имеет решение и притом единственное. Геометрически это означает существование единственной интегральной кривой дифференциального уравнения, проходящей через каждую точку открытого множества, в которой функция $f(x,y)$ определена.

Студент должен знать основные понятия и уметь решать дифференциальные уравнения первого порядка различных типов – неполные, с разделяющимися переменными, однородные и линейные.

Раздел V. РЯДЫ (*)

Тема 10. Числовые ряды (*)

Понятие числового ряда. Сходимость ряда и его сумма. Свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости (доказать). Расходимость гармонического ряда. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов: признак сравнения, Даламбера. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов. Абсолютная и условная сходимость. ([1 или 5, § 13.1–13.5]; [2 или 6, § 13.1 – 13.3], или [3, §13.1 – 13.7], или [4, §9.1 – 9.7].

При изучении данной темы студенты знакомятся с новой формой изучения числовой последовательности. Следует уяснить, что обозначение $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, или $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$, – символ, который не следует смешивать с обычной (конечной) суммой. Сумма и сходимость ряда определяется через предельный переход. При рассмотрении ряда могут решаться задачи: определение его суммы и исследование сходимости. Решение первой задачи «перекрывает» и вторую, но это не всегда возможно или вызывает значительные трудности. Решение второй задачи не менее важно, так как в случае, если ряд сходится, его сумма существует и ее можно найти приближенно с любой степенью точности, взяв сумму достаточного числа его первых членов.

Нужно уяснить, что необходимый признак сходимости (для сходящихся рядов $u_n \to 0$ при $n \to \infty$) не является достаточным, но из необходимого признака сходимости следует, что если предел общего члена $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится. Поэтому исследование сходимости числового ряда рекомендуется начинать с вычисления предела его общего члена (если он находится не очень сложно). Если предел окажется равным нулю, то это означает, что ряд может сходиться. Чтобы установить, сходится ли ряд, далее применяют достаточные признаки сходимости.

Применяя признаки сравнения, можно использовать в качестве «эталонных» следующие ряды:

1) геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ – сходится при $|q|<1$, расходится при $|q| \geq 1$;

2) гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится;

3) обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ – сходится при $\alpha > 1$; расходится при $\alpha \le 1$.

К признаку сравнения обращаются тогда, когда признак Даламбера показывает, что $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$. Во всех этих случаях применения достаточных признаков сходимости речь идет об исследовании рядов с положительными членами.

Говоря о сходимости знакочередующихся рядов, следует иметь в виду два типа сходимости: абсолютную и условную. Важность этих понятий связана с тем, что абсолютно сходящиеся ряды обладают некоторыми свойствами конечных сумм в отличие от условно сходящихся рядов. Решать вопрос о сходимости знакочередующегося ряда рекомендуем в таком порядке.

1. Составить ряд из абсолютных величин членов данного знакочередующегося ряда.

2. Исследовать сходимость полученного ряда. Может оказаться, что этот ряд сходится. Тогда исходный ряд также сходится, и притом абсолютно. Задача решена.

Если же составленный ряд расходится, то в этом случае о сходимости или расходимости исходного ряда сделать вывод нельзя; необходимо выполнить пункт 3.

3. Исследовать условную сходимость исходного знакочередующегося ряда, например, по признаку Лейбница.

Вопросы для самопроверки

1. Понятие функции, способы задания функций. Область определения. Четные и нечетные, ограниченные, монотонные функции. Примеры.

2. Понятие элементарной функции. Основные элементарные функции и их графики (постоянная, степенная, показательная, логарифмическая).

3. Предел последовательности при $n \to \infty$ и предел функции при $x \to \infty$. Признаки существования предела (с доказательством теоремы о пределе промежуточной функции).

4. Определение предела функции в точке. Основные теоремы о пределах (одну из них доказать).

5. Бесконечно малые величины (определение). Свойства бесконечно малых (одно из них доказать). Бесконечно большие величины, их связь с бесконечно малыми.

6. Второй замечательный предел, число e. Понятие о натуральных логарифмах.

7. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Точки разрыва. Примеры.

8. Производная и ее геометрический смысл. Уравнение касательной к плоской кривой в заданной точке.

9. Дифференцируемость функций одной переменной. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции (доказать теорему).

10. Основные правила дифференцирования функций одной переменной (одно из этих правил доказать).

11. Формулы производных основных элементарных функций (одну из формул вывести). Производная сложной функции.

12. Теоремы Ролля и Лагранжа (без доказательства). Геометрическая интерпретация этих теорем.

13. Достаточные признаки монотонности функции (один из них доказать).

14. Определение экстремума функции одной переменной. Необходимый признак экстремума (доказать).

15. Достаточные признаки существования экстремума (доказать одну из теорем).

16. Понятие асимптоты графика функции. Горизонтальные, наклонные и вертикальные асимптоты. Примеры.

17. Общая схема исследования функций и построения их графиков. Пример.

18. Функции нескольких переменных. Примеры. Частные производные (определение). Экстремум функции нескольких переменных и его необходимые условия.

19. Понятие об эмпирических формулах и методе наименьших квадратов. Подбор параметров линейной функции (вывод системы нормальных уравнений).

20. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Инвариантность формы дифференциала 1-го порядка.

21. Понятие первообразной функции. Неопределенный интеграл и его свойства (одно из свойств доказать).

22. Метод замены переменной в неопределенном интеграле и особенности применения этого метода при вычислении определенного интеграла.

23. Метод интегрирования по частям для случаев неопределенного и определенного интегралов (вывести формулу). Примеры.

24. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Свойства определенного интеграла.

25. Теорема о производной определенного интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Ньютона–Лейбница.

26. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Интеграл Пуассона (без доказательства).

27. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла. Примеры.

28. Понятие о дифференциальном уравнении. Общее и частное решения. Задача Коши. Задача о построении математической модели демографического процесса. **

29. Простейшие дифференциальные уравнения 1-го порядка (разрешенные относительно производной, с разделяющимися переменными) и их решение. Примеры. **

30. Однородные и линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка и их решения. Примеры. **

31. Определение числового ряда. Сходимость числового ряда. Свойства сходящихся рядов. Примеры.*

32. Необходимый признак сходимости рядов (доказать). Гармонический ряд и его расходимость.*

33. Признаки сравнения для знакоположительных рядов. Примеры.*

34. Признак Даламбера сходимости знакоположительных рядов. Пример.*

35. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов. Пример.*

36. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость рядов. Пример. *

Задачи для самоподготовки

Ниже приводятся номера рекомендуемых задач с решениями и для самостоятельного выполнения по учебникам [1 или 5], практикуму [2 или 6], учебнику [3] или учебнику [4], рассматриваемых в качестве основной литературы.

Студентам рекомендуется в первую очередь разобрать *большинство* (*часть*) *задач* с решениями (их номера выделены **жирным** шрифтом). Задачи для самостоятельного выполнения (их номера набраны обычным шифром) решать *выборочно* (в зависимости от лимита времени – например, каждую вторую задачу из списка задач по теме, или каждую третью, и т.д.).

Кроме того, уровень усвоения материала можно проверить по приводимым в практикуме [2 или 6], учебниках [3] или [4] тематическим и итоговым контрольным заданиям и тестам, решая задания в с учебно – программным материалом по каждой теме.

Тема	Номер задач			
	По учебнику [1]	По учебнику [2]	По учебнику [3]	По учебнику [4]
1	2	3	4	5
РАЗДЕЛ I. Введение в анализ				
1.Функции	**5.1, 5.5 – 5.7**	**5.1, 5.4, 5.6, 5.7а**	**5.1, 5.2, 5.6 – 5.8, 5.12, 5.15**	**1.1, 1.2, 1.6 – 1.8, 1.12, 1.15**
		5.12 – 5.16, 5.22 – 5.26, 5.36, 5.37	5.16 – 5.19, 5.23 – 5.31, 5.46, 5.47	1.16 – 1.19, 1.23 – 1.31, 1.46, 1.47
2. Пределы и непрерывность	**6.1 – 6.3, 6.5, 6.6, 6.8 – 6.11, 6.13, 6.14**	**6.1 – 6.6, 6.12 – 6.17, 6.45, 6.46, 6.68, 6.69, 6.97 – 6.99, 6.168, 6.169**	**6.1 – 6.3, 6.5, 6.6, 6.8 – – 6.11, 6.81, 6.155**	**2.1 – 2.3, 2.5, 2.6, 2.8 – – 2.11, 2.81, 2.155**
	6.18, 6.20 –6.27, 6.33–6.36, 6.38– 6.41	6.7 – 6.9, 6.11, 6.18 – 6.23, 6.25 – 6.27,6.30 — 6.34, 6.36– – 6.39, 6.43, 6.44, 6.47 – 6.67, 6.70 – 6.96, 6.100 – 6.120, 6.170 – 6.175	6.12 – 6.79, 6.110 – 6.132, 6.146 – 6.153, 6.156 – – 6.165	2.12 – 2.79, 2.110 – 2.132, 2.146 – 2.153, 2.156 – – 2.165
РАЗДЕЛ II. Дифференциальное исчисление				
3. Производная	**7.1 – 7.8, 7.10, 7.13, 7.15 – 7.17**	**7.1, 7.2, 7.13, 7.15, 7.109, 7.110**	**7.1 – 7.8, 7.10, 7.19 – 7.22, 7.25, 7.105, 7.106**	**3.1 – 3.8, 3.10, 3.19 – 3.22, 3.25, 3.105, 3.106**
	7.20 – 7.29,7.35, 7.42, 7.43, 7.46– 7.49	7.3, 7.5 – 7.8, 7.9, 7.10, 7.21, 7.25, 7.26, 7.28 – 7.31, 7.34 – –7.37, 7.41, 7.42 – 7.46, 7.48, 7.53, 7.54, 7.113 – 7.115, 7.122 – 7.127	7.26–7.51, 7.64, 7.65, 7.90 – – 7.100, 7.107–7.115, 7.117– – 7.119	3.26–3.51, 3.64, 3.65, 3.90 – –3.100, 3.107–3.115, 3.117– – 3.119
4.Приложение производной	**8.1– 8.3,8.4–8.7, 8.9, 8.11 – 8.15, 8.17**	**8.1, 8.9, 8.10, 8.13, 8.14, 8.35, 8.36, 8.38 – 8.40, 8.94 – 8.97**	**8.1 – 8.8, 8.10, 8.12 – 8.17, 8.25, 8.26, 8.28 – 8.30, 8.51, 8.52, 8.54 – 8.56, 8.110 – –8.113**	**4.1 – 4.8, 4.10, 4.12 – 4.17, 4.25, 4.26, 4.28 – 4.30, 4.51, 4.52, 4.54 – 4.56, 4.110 – –4.113**
	8.19–8.34, 8.41– 8.53	8.4 – 8.6, 8.15 – 8.22, 8.25, 8.27 – 8.30, 8.41, 8.52, 8.55 – –8.57,8.69 – 8.71, 8.75 –	8.20–8.23, 8.31 – 8.38, 8.41, 8.43–8.46,8.57–8.73, 8.75, 8.77 – 8.79, 8.81, 8.82,8.84 – –	4.20–4.23, 4.31 – 4.38, 4.41, 4.43–4.46,4.57–4.73, 4.75, 4.77 – 4.79, 4.81, 4.82,4.84 –

		8.77, 8.100 – 8.102, 8.105, 8.106, 8.108 – 8.118, 8.120, 8.121, 8.123, 8.124	8.87, 8.89, 8.91– 8.94, 8.116 – 8.118, 8.121, 8.122, 8.124 – 8.134, 8.136, 8.137, 8.139, 8.140	–4.87, 4.89, 4.91– 4.94, 4.116 – 4.118, 4.121, 4.122, 4.124 – 4.134, 4.136, 4.137, 4.139, 4.140
5.Дифференциал функции	**9.1, 9.3, 9.5**	**9.1, 9.2, 9.6**	**7.12 – 7.14, 7.16, 7.120**	**3.12 – 3.14, 3.16, 3.120**
	9.6 – 9.12	9.7 – 9.12, 9.13 – 9.17	7.122 – 7.125, 7.127, 7.128, 7.130, 7.132, 7.134 – 7.138, 7.140, 7.141	3.122 – 3.125, 3.127, 3.128, 3.130, 3.132, 3.134 – 3.138, 3.140, 3.141
РАЗДЕЛ III. Функции нескольких переменных				
6.Функция нескольких переменных	**15.7, 15.9, 15.13**	**15.1 – 15.3, 15.27, 15.88 – –15.90**	**9.1, 9.2, 9.6 – 9.9, 9.13 – – 9.15, 9.40, 9.41, 9.69 – – 9.71, 9.101 – 9.103**	**5.1, 5.2, 5.6 – 5.9, 5.13 – – 5.15, 5.40, 5.41, 5.69 – – 5.71, 5.101 – 5.103**
	15.23 – 15.32, 15.39, 15.40	15.6 –15.11,15.14–15.19, 15.31, 15.33–15.36, 15.38, 15.91 – 15.98	9.19 – 9.24, 9.44–9.51, 9.75– – 9.78, 9.80 – 9.88, 9.104 – – 9.109	5.19 – 5.24, 5.44–5.51, 5.75– – 5.78, 5.80 – 5.88, 5.104 – – 5.109
РАЗДЕЛ IV. Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения				
7.Неопределенный интеграл	**10.1–10.4,10.6 – – 10.11, 10.13, 10.14, 10.18а, 10.23, 10.24а, 10.25 – 10.27**	**10.1, 10.19, 10.20, 10.73, 10.105, 10.106, 10.132**	**10.1 – 10.4, 10.6 – 10.8, 10.10, 10.12 – 10.14, 10.19, 10.41, 10.42, 10.95, 10.155**	**6.1 – 6.4, 6.6 – 6.8, 6.10, 6.12 – 6.14, 6.19, 6.41, 6.42, 6.95, 6.155**
	10.33 – 10.39, 10.41 – 10.45, 10.47 – 10.54, 10.56 – 10.59, 10.61, 10.63 – – 10.65, 10.68 – – 10.70	10.2 – 10.4, 10.6 – 10.10, 10.13 – 10.15, 10.18, 10.21, 10.22, 10.24, 10.25, 10.28 – – 10.34,10.37,10.38,10.42– –10.56, 10.58 – 10.65, 10.75 – 10.81, 10.84, 10.85, 10.92, 10.93, 10.96, 10.103, 10.104, 10.107, 10.116,10.117, 10.133, 10.135 –10.136, 10.138, 10.140, 10.141	10.20 – 10.22, 10.24 – 10.32, 10.35 – 10.37, 10.43, 10.44, 10.46,10.47,10.50–10.56, 10.59, 10.60, 10.64 – 10.78, 10.80–10.87,10.97 – 10.107, 10.114,10.115,10.118,10.125 – 10.126, 10.156 – 10.161, 10.163 – 10.167	6.20 – 6.22, 6.24 – 6.32, 6.35 – 6.37, 6.43, 6.44, 6.46,6.47,6.50–6.56, 6.59, 6.60, 6.64 – 6.78, 6.80– 6.87,6.97 – 6.107, 6.114,6.115,6.118,6.125, 6.126, 6.156 – 6.161, 6.163 – 6.167
8. Определенный интеграл	**11.1–11.7,11.10, 11.11, 11.18 —11.22**	**11.1, 11.30, 11.73, 11.91**	**11.1 – 11.7,11.13, 11.14, 11.16, 11.23, 11.55, 11.112, 11.136**	**7.1 – 7.7, 7.13, 7.14, 7.16, 7.23, 7.55, 7.112, 7.136**

	11.25 – 11.30, 11.32 – 11.35, 11.37 – 11.39, 11.41 – 11.52, 11.57, 11.59	11.2 – 11.12, 11.14, 11.21, 11.22, 11.25, 11.26, 11.27, 11.29, 11.36 – 11.41, 11.43 – –11.45, 11.47 – 11.51, 11.75, 11.76 – 11.78, 11.81, 11.82, 11.92, 11.93 – 11.95	11.24 – 11.38, 11.40, 11.47, 11.48, 11.51 – 11.53, 11.55а, 11.61 – 11.66, 11.68 – 11.80, 11.82 – 11.86, 11.114 – –11.124, 11.126, 11.127, 11.133, 11.137 – 11.140	7.24 – 7.38, 7.40, 7.47, 7.48, 7.51 – 7.53, 7.55а, 7.61 – 7.66, 7.68 – 7.80, 7.82 – 7.86, 7.114 – 7.124, 7.126, 7.127, 7.133, 7.137 – 7.140
9. Дифференциальные уравнения **	**12.2–12.5, 12.8– – 12.13**	**12.1 – 12.4, 12.15, 12.16, 12.31, 12.32, 12.45, 12.46**	**12.1– 2.4, 12.8–12.13, 12.29–– 12.32, 12.43, 12.59, 12.73**	**12.1– 12.4, 12.8–12.13, 12.32– – 12.36, 12.47, 12.73, 12.77**
	12.25 – 12.36, 12.30 – 12.48	12.5 – 12.10, 12.11, 12.12, 12.14, 12.17 – 12.29, 12.33 – –12.41, 12.43, 12.44, 12.48, 12.49, 12.54, 12.58, 12.59	12.33 – 12.42, 12.45 – 12.51, 12.55 – 12.57, 12.61 – 12.70, 12.76, 12.77, 12.79 – 12.82, 12.86, 12.87	12.37 – 12.46, 12.49 – 12.55, 12.59 – 12.61, 12.65 – 12.74, 12.80, 12.81, 12.83 – 12.86, 12.90, 12.91
РАЗДЕЛ V. Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения				
10.Числовые ряды**	**13.1 – 13.12, 13.14, 13.15**	**13.1 – 13.3, 13.14 – 13.16, 13.68 – 13.70**	**13.1 – 13.9, 13.11 – 13.14, 13.16, 13.31 – 13.33, 13.35, 13.36, 13.103, 13.105**	**9.1 – 9.9, 9.11 – 9.14, 9.16, 9.31 – 9.33, 9.35, 9.36, 9.103, 9.105**
	13.16 – 13.40, 13.42 – 13.45	13.4 – 13.7, 13.8 – 13.13, 13.17 – 13.23, 13.25, 13.27, 13.29 – 13.36, 13.39 – 13.50, 13.53 – 13.55, 13.56 – 13.63, 13.66, 13.67, 13.71 – 13.83, 13.85 – 13.90	13.17, 13.18 – 13.22, 13.25 – – 13.30, 13.37– 13.50,13.53 – – 13.55, 13.59, 13.64 – 13.79, 13.82 – 13.96, 13.98, 13.101, 13.102, 13.106 – 13.130	9.17, 9.18 – 9.22, 9.25 – – 9.30, 9.37– 9.50,9.53 – 9.55, 9.59, 9.64 – 9.79, 9.82 – 9.96, 9.98, 9.101, 9.102, 9.106 – 9.130

Методические указания по выполнению контрольных работ

В соответствии с учебным планом по дисциплине «Математический анализ» каждый студент должен выполнить одну домашнюю контрольную работу в сроки, установленные учебным графиком, по приведенным в данном учебно-методическом пособии вариантам.

Задания со знаком* должны выполнять только студенты бакалавриата направлений «Экономика» и «Бизнес-информатика», со знаком ** – только студенты бакалавриата направления «Экономика» (см. примечание на с. 8).

По каждой контрольной работе студенты бакалавриата всех направлений проходят собеседование. На собеседовании выясняется, насколько глубоко усвоен пройденный материал и соответствуют ли знания студента и его навыки в решении задач качеству представленной работы.

Номер варианта контрольной работы определяется по *последней цифре номера личного дела студента, который совпадает с номером его зачетной книжки и студенческого билета*.

Сроки представления домашних контрольных работ на проверку указаны в индивидуальном графике студента, а также сообщаются во время осенней установочной сессии. Однако эти сроки являются крайними. Чтобы работа была своевременно проверена, а при необходимости доработана и сдана повторно, ее надлежит представить значительно раньше указанного срока. Студентам трехсессионных групп рекомендуется свои домашние контрольные работы выполнять во время сессии, на которой излагается учебный материал. Это даст возможность студенту использовать свое пребывание в институте для консультаций по всем возникшим при выполнении работы вопросам. После окончания сессии в течение двух недель работу необходимо окончательно завершить, а затем представить на проверку.

Если в ходе написания работы у студента появятся вопросы или затруднения в решении задач контрольного задания, он может обратиться в институт за устной или письменной консультацией (например, по электронной почте).

При изучении учебного материала и подготовке к контрольным работам рекомендуется использовать учебники и учебные пособия, Интернет-ресурсы, приведенные ниже в разделе «Литература», а также данную брошюру.

После проверки контрольная работа студента получает оценку «Допускается к собеседованию» или «Не допускается к собеседованию».

Каждая контрольная работа содержит набор заданий, при выполнении которых необходимо соблюдать следующие правила.

1. Работа должна быть выполнена в школьной тетради, имеющей широкие (не менее 3 см) поля для замечаний рецензента.
2. На обложке тетради следует указать фамилию, имя, отчество (полностью), факультет, специальность, курс, номер личного дела, вариант контрольной работы, а также фамилию преподавателя к которому направляется данная работа на проверку.
3. Перед решением каждой задачи нужно привести (распечатать) полностью ее условие.
4. Следует придерживаться той последовательности при решении задач, в какой они даны в задании, строго сохраняя при этом нумерацию примеров (задач).
5. Не допускается замена задач контрольной работы другими заданиями.
6. Решения задач должны сопровождаться развернутыми пояснениями, нужно привести в общем виде используемые формулы с объяснением употребляемых обозначений, а окончательный ответ следует выделить.
7. Чертежи к задачам (там где это возможно) должны быть выполнены в прямоугольной системе координат в полном соответствии с данными условиями задач и теми результатами, которые получены.
8. В конце работы приводится список использованной литературы (указывают автора, название, издательство, год издания), ставится дата окончания работы и подпись.
9. Если вычисления, выполняемые при решении задач, приближенные, то следует придерживаться правил приближенных вычислений, которые приведены в данном учебно-методическом пособии.

Если работа получила в целом положительную оценку («Допускается к собеседованию»), но в ней есть отдельные недочеты (указанные в тетради), то нужно сделать соответствующие исправления и дополнения в той же тетради (после имеющихся решений и записи «Работа над ошибками») и предъявить доработку на собеседовании. Если работа «Не допускается к собеседованию», ее необходимо в соответствии с требованиями преподавателя частично или полностью переделать. Повторную работу надо выполнить в той же тетради (если есть место) или в новой с надписью на обложке «Повторная», указав фамилию преподавателя, которым работа была ранее не зачтена. Вместе с незачтенной работой, повторную работу направить снова в институт.

Контрольная работа не проверяется, если ее вариант не совпадает с последней цифрой номера личного дела студента или она выполнена по вариантам прошлых лет.

Если работа получила в целом положительную оценку («Допускается к собеседованию»), но в ней есть отдельные недочеты (указанные в тетради), то нужно сделать соответствующие исправления и дополнения в той же тетради (после имеющихся решений и записи «Работа над ошибками») и предъявить доработку на собеседовании.

Если работа «Не допускается собеседованию», ее необходимо в соответствии с требованиями преподавателя частично или полностью переделать. Повторную работу надо выполнить в той же тетради (если есть место) или в новой с надписью на обложке «Повторная», указав фамилию преподавателя, которым работа была ранее не зачтена. Вместе с незачтенной работой повторную работу направить снова на проверку.

Контрольная работа не проверяется, если ее вариант не совпадает с последней цифрой номера личного дела студента или она выполнена по вариантам прошлых лет.

Если контрольная работа № 1 проводится с частичным использованием КОПР, то необходимо дополнительно представить протокол ответа студента о работе с КОПР. Контрольные работы предъявляются на экзамене и не подлежат возвращению после успешной сдачи экзамена.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ[1]

ВАРИАНТ 1

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 1)

Контрольная работа № 1

1. Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-27}{x^2-4x+3}.$$

2. Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{2x+1}{x^2}}.$$

3. Найти производную функции:

$$y = x\sqrt{\ln^5 3x + e^{-x}} + \ln 4.$$

4. Составить уравнения касательных к графику функции $y=\frac{1}{6}\left(x^2+9\right)(x-6)$ в точках ее пересечения с осями координат. Сделать чертеж.

5. Функции спроса и предложения имеют соответственно вид: $D(p)=100x-4p$; $S(p)=40x+x^2p$, где p – цена товара (услуги), x – некоторый технологический параметр. Равновесная цена определяется равенством спроса и предложения. Найти значение величины x, при котором равновесная цена будет наибольшей, если: а) $1\le x\le 5$; б) $3\le x\le 6$.

6. Исследовать функцию $y=\frac{3\left(x^2-x+1\right)}{x^2+x+1}$ и построить схематично ее график.

7*. Исследовать функцию $y = xe^{\frac{1}{x}}$ и построить схематично ее график**.**

---

[1] Задания со знаком* выполняют только студенты бакалавриата направлений «Экономика» и «Бизнес-информатика», со знаком ** – только студенты бакалавриата направления «Экономика» (см. примечание на с. 8).

Контрольная работа № 2

1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int 2^{3x} \cdot (x-1)dx.$$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_1^e \frac{\sqrt{5\ln x + 4}}{x}\,dx.$$

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \frac{8}{x}$, $y = \sqrt{x}$. Сделать чертеж.

5. Экспериментальные данные о переменных x и y приведены в таблице:

x_i	–1	0	2	4	7
y_i	0	1	1,3	1,6	1,9

В результате их выравнивания получена функция $y = \sqrt[3]{x}$. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$ (найти параметры a и b). Выяснить, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

6.** Решить дифференциальное уравнение:

$$y^2 + x^2 y' = xyy'.$$

7*. Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{11^{n-5}}{(n+10)13^{n-7}}$$

.

ВАРИАНТ 2

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 2)

Контрольная работа № 1

1. Найти предел:

$$\lim_{x\to 27}\frac{\sqrt[3]{x}-3}{x^2-27x}$$

2. Найти предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x+1}}$$

3. Найти производную функции:

$$y=\sqrt[3]{\frac{e^{4x^2}}{\ln^2 7x}}+e^{35}.$$

4. Составить уравнение касательной к кривой $y=\ln(x-1)$, перпендикулярно прямой, образующей с положительным направлением оси Ox угол 135°. Сделать чертеж.

5. Зависимость цены p от выпуска продукции x имеет вид: $p = 33 - 0{,}1x$. Функция издержек имеет вид: $f(x)=0{,}01x^3$. Прибыль от реализации продукции определяется как разность между выручкой px и издержками $f(x)$. Найти значение выпуска, при котором прибыль будет наибольшей, если: а) $20 \le x \le 50$; б) $10 \le x \le 25$.

6. Исследовать функцию $y=(3-x)e^{-3x}$ и построить схематично ее график.

7*. Исследовать функцию $y=x\ln^2 x$ и построить схематично ее график.

Контрольная работа № 2

1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int x^4 \ln x \, dx.$$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^1 \frac{x^2+5}{x+1} dx.$$

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_1^{\sqrt[3]{2}} 2^{x^3-1} \cdot x^2 dx.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = 2$, $x = 0$. Сделать чертеж.

5. Экспериментальные данные о переменных x и y приведены в таблице:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	3,0	3,5	5,0	5,5	7,3

В результате их выравнивания получена функция $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$ (найти параметры a и b). Выяснить, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

6.** Решить дифференциальное уравнение:

$$\left(x^4 + y^4\right) y' = x^3 y.$$

7*. Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 4n}{n!}.$$

ВАРИАНТ 3

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 3)

Контрольная работа № 1

1. Найти предел:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+4x+5})$$

2. Найти предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-9}{x+4}\right)^{4x+8}$$

3. Найти производную функции:

$$y=\frac{\ln^3\left(\sqrt[3]{3x}+1\right)}{5}-\frac{\ln 2}{2^{\sqrt{x}}+2^{-\sqrt{x}}}.$$

4. Составить уравнения касательных к линиям $y=\sqrt{x}$ и $y=\frac{32}{x^2}$ в точках их пересечения. Сделать чертеж.

5. Зависимость продаж товара от вложений в рекламу имеет вид: q=100+$2\sqrt{x}$, где x – вложения в рекламу, а q – количество проданного товара. Цена за единицу товара c=2. Эффект от рекламы может быть найден как выручка от реализации товара cq при наличии рекламы минус та же выручка при отсутствии рекламы (x=0), минус величина вложений в рекламу x. Найти величину вложений в рекламу, при которой эффект от рекламы будет наибольшим, если: а) $3\le x\le 5$; б) $1\le x\le 2$.

6. Исследовать функцию $y=\frac{x-1}{x^2+2}$ и построить схематично ее график.

7*. Исследовать функцию $\frac{e^{2-x}}{2-x}$ и построить схематично ее график.

Контрольная работа № 2

1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int 3^x(2x-5)dx.$$

2 Вычислить определенный интеграл:

$$\int_1^e \frac{dx}{x\left(\ln^2 x-5\ln x+6\right)}.$$

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2^x$, $y=2x-x^2$, $x=0$, $x=2$. Сделать чертеж.

5. Экспериментальные данные о переменных x и y приведены в таблице:

x_i	0,5	1,0	1,5	2,5	4
y_i	6,5	5,5	4,5	3,0	2,5

В результате их выравнивания получена функция $y=3^{2-x}+2$. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y=ax+b$ (найти параметры a и b). Выяснить, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

6.**Решить дифференциальное уравнение:

$$\left(x^2-3xy\right)dx+x^2dy=0.$$

7*. Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2-6n-6)3^{n-8}}{14^{n-5}}.$$

ВАРИАНТ 4

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 4)

Контрольная работа № 1

1. Найти предел:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6-3x+8x^2}{8x-3}-\frac{5-x+x^2}{x-6}\right)$$

2. Найти предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7^x+5}{7^x+9}\right)^{7^x-5}$$

3. Найти производную функции:

$$y=\frac{2}{\sqrt[3]{\ln\left(5x^2+1\right)}}+\sqrt{x}\cdot e^{1-3x}+\ln 8.$$

4. Написать уравнение касательной к параболе $y=x^2+1$, пересекающей ось абсцисс в точке $x_0=1{,}875$ и не имеющей общих точек с третьей координатной четвертью. Сделать чертеж.

5. Функции спроса и предложения имеют соответственно вид: $D(p)=200x-9p$; $S(p)=40x+x^2p$, где p – цена товара (услуги), x – некоторый технологический параметр. Равновесная цена определяется равенством спроса и предложения. Найти значение величины x, при котором равновесная цена будет наибольшей, если: а) $1\le x\le 5$; б) $1\le x\le 2$.

6. Исследовать функцию $y=e^{2x-x^2}$ и схематично построить ее график

7*. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ и построить схематично ее график.

Контрольная работа № 2

1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 9}{x - 1} dx.$$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_1^e \frac{(2\ln x + 1)^3 dx}{x}.$$

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^1 e^{x^3} x^5 dx.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3 + 2x - x^2$, $y = x + 1$, $y = 0$. Сделать чертеж.

5. Экспериментальные данные о переменных x и y приведены в таблице:

x_i	4	5	6	7	8
y_i	–5,5	–5	–1	7	13

В результате их выравнивания получена функция $y = x^2 - 7x + 6$. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$ (найти параметры a и b). Выяснить, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

6.** Решить дифференциальное уравнение:

$$xy' - y = x^2 e^x.$$

7*. Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n^2}{3n^3 - 2}.$$

ВАРИАНТ 5

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 5)

Контрольная работа № 1

1. Найти предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x+\sqrt{x}}.$$

2. Найти предел:

$$\lim_{x \to +\infty} (x+7)(\ln(9x-1) - \ln(9x+4)).$$

3. Найти производную функции:

$$y = \ln^2 \frac{2x-3}{2x+3} - x \cdot e^{\sqrt[7]{2x-3}} + 2e^6.$$

4. При каких значениях параметра k касательная к гиперболе $y = \frac{k}{x}$ пересекает ось абсцисс в точке $x_0 = 4$. Сделать чертеж.

5. Зависимость цены p от выпуска продукции x имеет вид: $p = 100 - 0{,}9x$. Функция издержек имеет вид: $f(x)=0{,}032\ x^3$. Прибыль от реализации продукции определяется как разность между выручкой px и издержками $f(x)$. Найти значение выпуска, при котором прибыль будет наибольшей, если: а) $5 \le x \le 10$; б) $10 \le x \le 25$.

6. Исследовать функцию $y = \ln\left(e + x^2\right)$ и построить схематично ее график.

7*. Исследовать функцию $y = \left(\frac{x+1}{1-x}\right)^4$ и построить схематично ее график.

.

Контрольная работа № 2

1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}}\,dx.$$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x + 8}}.$$

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^1 \frac{x^4 dx}{4x^5 + 2}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x + y - 4 = 0$, $y = \dfrac{3}{x}$, $x = 0$, $y = 0$. Сделать чертеж.

5. Экспериментальные данные о переменных x и y приведены в таблице:

x_i	1	3	5	7	9
y_i	2,5	4,0	5,1	6,5	7,4

В результате их выравнивания получена функция $y = \sqrt{5x+3}$. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$ (найти параметры a и b). Выяснить, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

6.** Решить дифференциальное уравнение:

$$x^2 y' + xy + 1 = 0.$$

7*. Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{6n^2+3}}{\sqrt{5n^4 - 4n - 1}}.$$

ВАРИАНТ 6

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 6)

Контрольная работа № 1

1. Найти предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\ln x}{e^{2x}-5x}.$$

2. Найти предел:

$$\lim_{x\to+\infty}(3x+2)(\ln(5x-1)-\ln(5x+4)).$$

3. Найти производную функции:

$$y=\ln^2\left(1-\frac{5}{2\sqrt{x}+1}\right)+\frac{xe^{-x^2}}{3}.$$

4. Написать уравнение касательных к гиперболе $y=\frac{6x-1}{x+3}$, перпендикулярных прямой $2x+38y=5$. Сделать чертеж.

5. Зависимость продаж товара от вложений в рекламу имеет вид: q=200+$3\sqrt{x}$, где x – вложения в рекламу, а q – количество проданного товара. Цена за единицу товара c=2. Эффект от рекламы может быть найден как выручка от реализации товара cq при наличии рекламы минус та же выручка при отсутствии рекламы (x=0), минус величина вложений в рекламу x. Найти величину вложений в рекламу, при которой эффект от рекламы будет наибольшим, если: а) $3\le x\le 5$; б) $5\le x\le 10$.

6. Исследовать функцию $y=\left(x^2+2x-2\right)e^x$ и построить схематично ее график.

7*. Исследовать функцию $y=\frac{\ln x}{x^2}$ и построить схематично ее график.

Контрольная работа № 2

1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7x-8}}.$$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x^2}.$$

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_1^e \ln x \cdot x^3\, dx.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=\frac{x^2}{2}$, $y=2x$. Сделать чертеж.

5. Экспериментальные данные о переменных x и y приведены в таблице:

x_i	2	3	4	5	6
y_i	2	3	4	6	8

В результате их выравнивания получена функция $y=\sqrt{2^x}$. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y=ax+b$ (найти параметры a и b). Выяснить, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

6.** Решить дифференциальное уравнение:

$$y'+y=e^{-2x}+x.$$

7*. Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}.$$

ВАРИАНТ 7

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 7)

Контрольная работа № 1

1. Найти предел:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}.$$

2. Найти предел:

$$\lim_{x\to 0+0}(\ln x)^x.$$

3. Найти производную функции:

$$y=\ln\frac{3x^4e^{5x+2}}{\sqrt{4-x^2}}+x\cdot 10^{\sqrt{x}}+e^{-5}.$$

4. Написать уравнение касательной к параболе $y=4x^2-8$, параллельной прямой, проходящей через точки (2; 3) и (7; 13). Сделать чертеж.

5. Функции спроса и предложения имеют соответственно вид: $D(x)=200x-16p$; $S(x)=50x+x^2p$, где p – цена товара (услуги), x – некоторый технологический параметр. Равновесная цена определяется равенством спроса и предложения. Найти значение величины x, при котором равновесная цена будет наибольшей, если: а) $1\le x\le 5$; б) $1\le x\le 2$.

6. Исследовать функцию $y=e^{x-2}(5-x)$ и построить схематично ее график.

7*. Исследовать функцию $y=x+\dfrac{27}{x^3}$ и построить схематично ее график.

.

Контрольная работа № 2

1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int e^{x^3+1}\cdot x^2 dx.$$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_2^6 x\sqrt{x-2}\,dx.$$

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{3}(3x-1)\cdot e^{-\frac{x}{3}}\,dx.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\dfrac{x+2}{x-2}$, $x=0$, $x=-3$, $y=1$. Сделать чертеж.

5. Экспериментальные данные о переменных *x* и *y* приведены в таблице:

x_i	2	4	5	6	9
y_i	5,5	6	6,5	7	7,5

В результате их выравнивания получена функция $y=\sqrt{x}+4$. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y=ax+b$ (найти параметры *a* и *b*). Выяснить, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

6.** Решить задачу Коши:

$$e^x y' - x^2 = 0;\ y(0)=0.$$

7*. Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{11^n}{(n^{24}+10)}$$

ВАРИАНТ 8

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 8)

Контрольная работа № 1

1. Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{49-3x}-7}.$$

2. Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{5-x}{5-2x}\right)^{\frac{6}{x}}.$$

3. Найти производную функции:

$$y=5e^{\ln 3x}+3^{-x}\ln^2\left(\sqrt{3}+2^{5x-7}\right).$$

4.Написать уравнение касательных к параболе $y=x^2-1$ в точках пересечения ее с параболой $y=2x^2-5x+3$. Сделать чертеж.

5. Зависимость цены p от выпуска продукции x имеет вид: $p = 32 – 0{,}2x$. Функция издержек имеет вид: $f(x)=0{,}01x^3$. Прибыль от реализации продукции определяется как разность между выручкой px и издержками $f(x)$. Найти значение выпуска, при котором прибыль будет наибольшей, если: а) $20\le x\le 50$; б) $34\le x\le 40$.

6. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, и построить схематично ее график.

7*. Исследовать функцию $y=e^{\frac{x^2+1}{x}}$ и построить схематично ее график.

Контрольная работа № 2

1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+9}}.$$

2. Вычислить определенный интеграл*:*

$$\int_{e^2}^{e} \frac{dx}{x\ln x}.$$

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_{3}^{5} \frac{xdx}{x^2-4x+4}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=1$, $y=x^2$, $y=4$ и расположенной в первой четверти координатной плоскости. Сделать чертеж.

5. Экспериментальные данные о переменных x и y приведены в таблице:

x_i	3	3,5	4	4,5	5
y_i	–1	0	1	3	4

В результате их выравнивания получена функция $y=(x-3)^2$. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y=ax+b$ (найти параметры a и b). Выяснить, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

6.** Решить задачу Коши:

$$(e^x+1)y'+y(e^{2x}-1)=0;\ y(0)=1.$$

7*. Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{2n-1}.$$

ВАРИАНТ 9

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 9)

Контрольная работа № 1

1. Найти предел:

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x^2-4x-16}{x^3-64}.$$

2. Найти предел;

$$\lim_{x\to +\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}.$$

3. Найти производную функции:

$$y=\frac{\ln^4(3x+1)-\sqrt{7}}{\sqrt{e^{7x}+2x^{\frac{5}{3}}}}.$$

4. Написать уравнение касательной к гиперболе $y=\frac{2x-4}{x+1}$ в точке с ординатой, равной 4. Сделать чертеж.

5. Зависимость продаж товара от вложений в рекламу имеет вид: q=100+$\sqrt{x}$, где x – вложения в рекламу, а q – количество проданного товара. Цена за единицу товара c=4. Эффект от рекламы может быть найден как выручка от реализации товара cq при наличии рекламы минус та же выручка при отсутствии рекламы (x=0), минус величина вложений в рекламу x. Найти величину вложений в рекламу, при которой эффект от рекламы будет наибольшим, если: а) $3 \le x \le 5$; б) $5 \le x \le 6$.

6. Исследовать функцию $y = xe^{-2x^2}$ и построить схематично ее график.

7*. Исследовать функцию $\ln\left(3-2x-x^2\right)$ и построить схематично ее график.

Контрольная работа № 2

1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int e^{-5x+1}(2x+3)dx.$$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_1^9 \frac{4^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_4^5 \frac{2x-1}{x^2-2x-3}\,dx.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=\dfrac{y^2}{4}$, $xy=2$, $x=4$ и расположенной в первой четверти координатной плоскости. Сделать чертеж.

5. Экспериментальные данные о переменных *x* и *y* приведены в таблице:

x_i	2	2,5	3	3,5	4
y_i	2,5	3	4,5	5	7

В результате их выравнивания получена функция $y=x^2-3x+4$. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y=ax+b$ (найти параметры *a* и *b*). Выяснить, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

6.** Решить задачу Коши:

$$x(1+y)y'=y^2;\ y(1)=1.$$

7*. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{11n+8}{n+10}.$$

ВАРИАНТ 10

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 0)

Контрольная работа № 1

1. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+9x^2}+3x}{\sqrt[3]{8+x^3}-2x}$.

2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)^{\ln x}$.

3. Найти производную функции:

$$y=\sqrt[3]{\frac{x^3+xe^{6x^5}}{\sqrt[5]{5-x}}}.$$

4. Написать уравнение касательной к графику функции $y=\ln(1+x^2)$ в точке с абсциссой, равной 1. Сделать чертеж.

5. Зависимость продаж товара от вложений в рекламу имеет вид: q=100+$2\sqrt{x}$, где x – вложения в рекламу, а q – количество проданного товара. Цена за единицу товара c=8. Эффект от рекламы может быть найден как выручка от реализации товара cq при наличии рекламы минус та же выручка при отсутствии рекламы (x=0), минус величина вложений в рекламу x. Найти величину вложений в рекламу, при которой эффект от рекламы будет наибольшим, если: а) $30\le x\le 50$; б) $50\le x\le 92$.

6. Исследовать функцию $y=\dfrac{x-5}{e^{2x}}$ и схематично построить ее график.

7*. Исследовать функцию $y=\dfrac{2x^3}{x^2-3}$ и построить схематично ее график.

Контрольная работа № 2

1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 5e^x + 4}.$$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x\left(5-\sqrt{x}\right)}}.$$

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^1 e^{2x} \cdot x^2 dx.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 2$, $y = x$, $x = 2x - 1$. Сделать чертеж.

5. Экспериментальные данные о переменных x и y приведены в таблице:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2,4	2,1	2,0	1,2	1,5

В результате их выравнивания получена функция $y = \sqrt[4]{30 - x^2}$. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$ (найти параметры a и b). Выяснить, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

6.** Решить задачу Коши:

$$y' - 5y = e^x;\ y(0) = 1.$$

7*. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{(n^7 + 10)}$$

Примеры выполнения заданий контрольных работ

Ниже приведены (с решениями) типовые варианты контрольных работ по дисциплине «Математический анализ».

Эти варианты составлены из соответствующих задач с решениями учебников [1 или 5], практикумов [2 или 6], учебника [3] или учебника [4], номера которых представлены в таблице.

Решения задач типовых вариантов

№ зада-ния	Номера задач (с решениями)			
	по учебникам [1] или [5]	по практикумам [2] или [6]	по учебнику[3]	по учебнику[4]
Контрольная работа № 1				
1	6.11и	6.68	6.11г	2.11г
2	6.13	6.98	6.81а	2.81а
3	7.13б	7.13г	7.26б	3.20б
4	7.15б	7.109а	7.105 б	3.105б
5	8.9	8.125	8.141	4.141
6	8.14	8.96	8.112	4.112
7	8.17	8.97	8.113	4.113
Контрольная работа № 2				
1	10.18а	10.19д	10.36	6.41д
2	11.18б	11.1в	11.23г	7.23г
3	11.19	11.1г	11.23д	7.23д
4	11.21	11.30в	11.56в	7.56в
5	15.13	15.88	9.101	5.101
6	12.13	12.45	12.73	8.76
7	13.14д	13.15г	13.32б	9.32б

ЛИТЕРАТУРА

Основная[1]

1. Высшая математика для экономистов: Учебник./Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010.
2. Высшая математика для экономистов: Практикум./Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2010.
3. Высшая математика для экономического бакалавриата. Учебник и Практикум./Под ред. Н.Ш. Кремера. Части I, II – М.: Юрайт, 2012.
4. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. Математический анализ: Учебник и Практикум / под. ред. Н.Ш. Кремера – М.: Юрайт, 2014.
5. Математика для экономистов и менеджеров. Учебник /под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Кнорус, 2014.
6. Математика для экономистов и менеджеров. Практикум /под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Кнорус, 2014.

Дополнительная

7. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики. Учебно-справочное пособие. / Под ред. Н.Ш. Кремера.– М.: Юрайт, 2014.
8. Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов. Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2006.
9. Красс М.С., Чупрынов Б. П. Математика для экономистов. Учебник. – СПб.: Питер, 2005.
10. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., И.Г. Шандра. Математика в экономике: часть 2. Учебник. – М: Финансы и статистика, Инфра-М, 2011.
11. Малугин В.А. Математика для экономистов. Математический анализ. Курс лекций. – М.: Эксмо, 2009.

Электронные ресурсы

1. Математический анализ. Обзорная лекция для студентов I курса всех направлений (http://repository.vzfei.ru).

[1] Предлагается на выбор учебники (пособия) [1 или 5] и [2 или 6], [3] или [4], при этом возможно использование книг предыдущих (по сравнению с указанными) лет издания.

2. Компьютерная обучающая программа для студентов 1 курса по дисциплине «Математический анализ» (КОПР1-М); зарегистрирована в Информационно-библиотечном фонде РФ, рег. №50200000053 от 08.06.2000. Дата обновления 06.12.2010. (http://repository.vzfei.ru). Доступ по логину и паролю.

3. Математический анализ. Учебно-методическое пособие /под ред. Н.Ш. Кремера – М.: Финансовый университет, 2013 (электронная версия в разделе «Образовательные ресурсы» на сайте «Финансовый университет – заочное обучение»). (http://repository.vzfei.ru).

4. И.М Эйсымонт, Н.Ш. Кремер. Математический анализ и линейная алгебра. Методические указания по компьютерному тестированию – М.: Вузовский учебник, 2007 (электронная версия в разделе «Учебные ресурсы» на сайте «Финансовый университет – заочное обучение»). (http://repository.vzfei.ru).

5 Н.Ш. Кремер, И.М Эйсымонт. Математика. Методические указания по проведению и выполнению контрольных работ с частичным использованием КОПР – М.: ВЗФЭИ, 2009 (электронная версия в разделе «Учебные ресурсы» на сайте «Финансовый университет – заочное обучение») (http://repository.vzfei.ru).

6. Электронные тестовые базы LAN-TESTING и STELLUS (http://stellus).

7. Электронные ресурсы в системе STELLUS (http://stellus).

8. Электронная библиотека (www.bibliotekar.ru).

Содержание

Математический анализ. Учебно-методическое пособие. Для студентов первого курса бакалавриата, обучающихся по направлениям 38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент», 38.03.03 «Управление персоналом» и 38.03.05 «Бизнес-информатика» / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. М.: Финуниверситет, 2014.